7 ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ СПЛАЙНАМИ

Интерполирование многочленом Лагранжа или Ньютона на всем отрезке [a,b] с использованием большого числа узлов интерполяции часто приводит к плохому приближению, что объясняется сильным накоплением погрешностей в процессе вычислений. Кроме того, из-за расходимости процесса интерполяции увеличение числа узлов не обязано приводить к повышению точности.

Чтобы избежать больших погрешностей, весь отрезок [a,b] разбивают на частичные отрезки и на каждом из частичных отрезков приближенно заменяют функцию $f(x)$ многочленом не высокой степени (кусочно-полиномиальная интерполяция).

Сплайн-функцией или сплайном называют кусочно-полиномиальную функцию, определённую на отрезке [a,b] и имеющую на этом отрезке некоторое число непрерывных производных.

Преимущества сплайнов: сходимость и устойчивость процесса вычислений.

7.1 Построение кубического сплайна

Пусть на отрезке [a,b] задана непрерывная функция $f(x)$. Введём сетку: $a = x_0 < x_1 < ..... < x_{-1} < x_n = b$ и обозначим $f_i = f(x_i), i = 0,1,...,u$.

Сплайном, соответствующим данной функции $f(x)$ и данным узлам $\{x_i\}^N{}_{i=0}$ называется функция $S(x)$, удовлетворяющая следующим условиям:

а) на каждом сегменте $[x_{i-1}, x_i], i = 1,2,...,N$ функция $S(x)$ является многочленом 3-ей степени.

б) функция $S(x)$, а также её первая и вторая производные непрерывны на [a,b];

в) $S(x_i) = f(x_i), i = 0,1,...,N$

последнее условие называется условием интерполирования, а сплайн, определяемый условиями а)-в), называется также интерполяционным кубическим сплайном.

Построение кубического сплайна.

На каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i], i = 1,2,...,N$ будем искать функцию $S(x) - S_i(x)$ в виде многочлена 3-ей степени.

$$S_i(x) = a_i + b_i(x \cdot x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d^i}{6}(x - x_i)^3$$

$$x_{i-1} \le x \le x_i, i = 1,2,...,N$$

a_i, b_i, c_i, d_i - требуется найти, ясно, что:

$$a_i = S_i(x_i), b_i = S_i^{'}, c_i = S_i^{''}(x_i), d_i = S_i^{'''}(x_i)$$

Из условий интерполирования $S(x_i) = f(x_i), i = 0,1,...,N$ получаем, что $a_i = f(x_i); i = 1,2,...,N$ доопределим, кроме того, $a_0 = f(x_0)$

Далее требование непрерывности функции $S(x)$ приводит к условиям:
$S_i(x_i) = S_{i+1}(x_i), i = 1,2,...,N-1 \Rightarrow$

$$a_i = a_{i+1} + b_{i+1}(x_i - x_{i+1}) + \frac{c_{i+1}}{2}(x_i - x_{i+1})^2 + \frac{d_{i+1}}{6}(x_i - x_{i+1})^3, i = 0,1,...,N-1.$$

Обозначая $h_i = x_i - x_{i-1}$, получим:

$$h_i b_i - \frac{h_i^2}{2} c_i + \frac{h_i^3}{6} d_i = f_i - f_{i-1}; i = 0,1,...,N-1 \quad (43)$$

Условия непрерывности первой производной
$S_i'(x_i) = S_{i+1}'(x_i); i = 1,2,...,N-1$ приводят к уравнениям

$$c_i h_i - \frac{d_i}{2} h_i^2 = b_i - b_{i-1}, i = 2,3,... \quad (44)$$

Из условия непрерывности второй производной получаем уравнения:

$$d_i h_i = c_i - c_{i-1}; i = 2,3,... \quad (45)$$

Объединяя систему (14) – (16), получим систему 3N-2 уравнений относительно 3N неизвестных $b_i, c_i, d_i, i = 1,2,...,N$

Два недостающих уравнения получают, задавая те или иные граничные условия для $S(x)$. Предположим, например, что $f''(a) = f''(b) = 0$. Тогда естественно требовать, чтобы $S''(a) = S''(b) = 0 \Rightarrow S_1''(x_0) = 0, S''_N(x_N) = 0$, т.е. $c_1 - d_1 h_1 = 0, c_N = 0$.

Заметим, что условие $c_1 - d_1 h_1 = 0, c_N = 0$ совпадает с уравнением (45) при i=1, если положить $c_0 = 0$. Таким образом, приходили к замкнутой системе уравнений для определения коэффициентов кубического сплайна:

$$h_i d_i = c_i - c_{i-1}, i = 1,2,...,N, c_0 = c_n - 0 \quad (46)$$

$$h_i c_i - \frac{h_i^2}{2} d_i = b_i - b_{i-1}; i = 2,3,...,N \quad (47)$$

$$h_i b_i - \frac{h_i^2}{2} c_i + \frac{h_i^3}{6} d_i = f_i - f_{i-1}; i = 1,2,...,N \tag{48}$$

Убедимся в том, что эта система имеет единственное решение. Исключим из (46) – (48) переменные $b_i, d_i, i = 1,2,...,N-1$ и получим систему, содержащую только $c_i, i = 1,2,...,N-1$

Для этого рассмотрим два соседних уравнения (48)

$$b_i = \frac{h_i}{2} c_i - \frac{h_i^2}{6} d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}$$

$$b_{i-1} = \frac{h_{i-1}}{2} c_{i-1} - \frac{h^2{}_{i-1}}{6} d_{i-1} + \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}$$

и вычтем второе уравнение из первого. Тогда получим:

$$b_i - b_{i-1} = \frac{1}{2}(h_i c_i - h_{i-1} c_{i-1}) - \frac{1}{6}(h_i{}^2 d_i - h_{i-1}{}^2 d_{i-1}) + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}$$

Подставляя найденное выражение для $b_i - b_{i-1}$ в правую часть уравнения (47), получим

$$h_i c_i + h_{i-1} c_{i-1} - \frac{h^2{}_{i-1}}{3} d_{i-1} - \frac{2h_i^2}{3} d_i = 2\left(\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}} \right) \tag{49}$$

Далее из уравнения (46) получаем:

$h_i{}^2 d_i = h_i (c_i - c_{i-1}), h_{i-1}{}^2 d_{i-1} = h_{i-1}(c_{i-1} - c_{i-2})$

и подставляя эти уравнения в (20), получим:

$$h_i c_{i-2} + 2(h_{i-1} + h_i) c_{i-1} + h_i c_i = 6\left(\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}} \right)$$

Окончательно для определения коэффициентов c_i получаем систему уравнений.

$$h_i c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1}) c_i + h_{i+1} c_{i+1} = 6\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \right)$$

$$i = 1,2,...,N-1, c_0 = c_N = 0 \tag{50}$$

В силу диагонального преобладания системаимеет единственное решение. Матрица этой системы трёхдиагональная, её решение легко найти методом прогонки(который будет рассмотрен позже). По найденным

коэффициентам c_i коэффициенты b_i и d_i определяются с помощью явных формул:

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}, b_i = \frac{h_i}{2} c_i - \frac{h_i^2}{6} d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}$$
$$i = 1,2,...,N$$

(51)

Таким образом, доказано, что 7-й единственный кубический сплайн, определяемый условиями а) – в) и граничными условиями $S''(a) = S''(b) = 0$. Заметим, что можно рассматривать и другие граничные условия.

7.2 Сходимость процесса интерполирования кубическими сплайнами

Покажем, что интерполирование кубическими сплайнами является сходящимся процессом, т.е. при неограниченном увеличении числа узлов N соответствующая последовательность сплайн – функций сходится к интерполируемой функции f(x).

Оценки погрешности интерполяции r(x) = f(x) – S(x) зависят от выбора сеток и от гладкости f(x). Для простоты изложения будем рассматривать последовательность равномерных сеток:

ωh = {xi = a + ih, i = 0,1…N}

с шагом $h = \frac{b-a}{N}$. В этом случае основная система уравнений (50) принимает вид:

$c_{i-1} + 4c_i + c_{i+1} = 6 f_{\bar{x}x,i}$, i = 1,2…N-1; c0 = cN = 0 (23)

где обозначено $f_{\bar{x}x,i} = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2}$.

От функции f(x) требуем: f(x) ∈ c(4)[a, b], кроме того $f''(a) = f''(b) = 0$ и такие же условия для сплайнов. Обозначим: $\|g(x)\|_{c[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |g(x)|, \quad M_4 = \|f^4(x)\|_{c[a,b]}$.

Пусть Sh(x) – кубический сплайн, построенный для функции f(x) на сетке ωh. Оказывается, имеет место следующая теорема:

Теорема: Для $f(x) \in c^{(4)}[a,b]$ справедливы следующие оценки:

$$\|f(x) - S_h(x)\|_{c[a,b]} \le M_4 h^4$$

$$\|f'(x) - S'_h(x)\|_{c[a,b]} \le M_4 h^3$$

$$\|f''(x) - S''_h(x)\|_{c[a,b]} \le M_4 h^2$$

Из этих оценок следует, что при $h \to 0$, т.е., при $N \to \infty$ последовательности $S_h^{(i)}$, i = 0,1,2, сходятся соответственно к функциям $f^{(i)}(x)$, i = 0,1,2.